Über die Wechselwirkung eines durch drei Zustandsklassen gekennzeichneten Systems mit seiner Umgebung

Von H. BAUR *

(Z. Naturforschg. **17 a**, 321—326 [1962]; eingegangen am 28. November 1961)

Die Eigenschaften der zweistelligen, total-reflexiven, transitiven Relationen (Übergangsrelationen), die in einer Menge von drei Elementen gegeben sind, werden aufgezählt. Die Menge dieser Relationen ist nach FALK und JUNG isomorph zu der Menge der thermodynamisch erlaubten Typen, mit denen ein durch drei Zustandsklassen gekennzeichnetes System mit seiner Umgebung in Wechselwirkung treten kann. Es wird bemerkt, daß diese Wechselwirkungstypen auch als „Erscheinungsformen" des Systems interpretiert werden können, in bezug auf potentiell im System vorgegebene Eigenschaften, deren Aktualisierung durch Wechselwirkung in einer Kopplung der Zustandsklassen besteht. Die Übergangsrelationen bzw. Wechselwirkungstypen oder Erscheinungsformen des betrachteten Systems bilden einen komplementären, nicht-distributiven Verband, dessen Struktur eine gewisse Ähnlichkeit mit der Struktur der Menge der derzeit gesicherten Elementarteilchen aufweist.

Jeder durch eine Zustandsfunktion gegebenen Eigenschaft eines (physikalischen) Systems entspricht eine Einteilung der Menge der Zustände des Systems in Klassen. Jeder Mannigfaltigkeit solcher Eigenschaften entspricht eine Klasseneinteilung der Zustandsmenge, die feiner ist als die durch eine einzelne Eigenschaft gegebene Klasseneinteilung oder höchstens einer solchen Klasseneinteilung gleicht. Zum Beispiel entspricht der Eigenschaft „Energie" meist eine Einteilung der Zustandsmenge in abzählbar-unendlich viele Klassen, den Klassen der untereinander energetisch entarteten Zustände. Die Berücksichtigung einer zweiten Eigenschaft, z. B. der Eigenschaft „Impuls", führt dann im allgemeinen zu einer Verfeinerung der Energieklassen, zu den Klassen gleicher Energie *und* gleichen Impulses.

Liegt die Menge $\mathfrak{Z}$ der Zustandsklassen in bezug auf irgendwelche Eigenschaften E_i eines Systems als gegeben vor, so können nach FALK und JUNG [1] die Einwirkungen, die das System von „außen" erleiden kann, d. h. die Typen, mit denen das System mit seiner Umgebung in bezug auf die Eigenschaften E_i in Wechselwirkung treten kann, beschrieben werden durch die in $\mathfrak{Z}$ definierten zweistelligen, total-reflexiven Relationen. Das sind diejenigen zweistelligen Relationen (Prädikate) R in $\mathfrak{Z}$, die im Sinne des logischen Prädikatenkalküls gekennzeichnet sind durch $I \subset R$ (I = Identität). Die in der Thermodynamik zugelassenen System-Einwirkungen haben darüber hinaus die Eigenschaft, daß die ihnen zugeordneten Relationen der Bedingung $R^2 \subset R$ (Transitivität) unterliegen [2]. Die total-reflexiven, transitiven, zweistelligen Relationen werden von FALK und JUNG als Übergangsrelationen bezeichnet. Sind die Einwirkungen so beschaffen, daß die ihnen zugeordneten Übergangsrelationen R der Bedingung

$$\forall\, z_i, z_k \in \mathfrak{Z} \quad (i \neq k \rightarrow R\, z_i\, z_k \vee R\, z_k\, z_i)$$

genügen, so erzeugen sie eine Variable im System.

Im Hinblick auf die mit einem kleinen Wertebereich ausgestatteten struktur- und ladungsbestimmenden Zustandsfunktionen der Elementarteilchen und auf den vielfach vermuteten kombinatorischen Ursprung der Mannigfaltigkeit der Elementarteilchen erscheint es nun sinnvoll, auch die möglichen Einwirkungen auf solche Systeme zu untersuchen, die durch eine Zustandsmenge mit kleiner Anzahl von Elementen charakterisiert werden können. Die Annahme einer kleinen Elementezahl bedeutet dabei nicht notwendig, daß das System nur einer beschränkten Zahl von Zuständen fähig ist, sondern daß das System nur im Hinblick auf eine gewisse Eigenschaft E betrachtet wird, die eine Einteilung seiner Zustände in eine beschränkte Zahl von Klassen erlaubt. Zum Beispiel ruft jede ladungsartige Eigenschaft mit einem Wertebereich $(-1;\ 0;\ +1)$ eine Einteilung in drei Klassen hervor (wobei natürlich die eine oder andere Klasse leer sein kann). Im folgenden soll die Menge der möglichen total-reflexiven und transitiven Einwirkungen auf ein solches, dreigeteiltes System betrachtet werden.

* Gegenwärtige Adresse: Ziegelhausen über Heidelberg, Eichendorffweg 7 B.

[1] G. FALK u. H. JUNG, Axiomatik der Thermodynamik, in Handbuch der Physik, Band III/2, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959.

[2] Mit $I \subset R$ zusammen bedeutet das, daß die thermodynamisch erlaubten Einwirkungen idempotent sind.

I. Die Struktur des Verbandes der Übergangsrelationen in einer Menge mit drei Elementen

Vorgegeben sei eine Zustandsmenge $\mathfrak{Z}$, die in drei Zustandsklassen zerfällt: $\mathfrak{Z}=\{z_1, z_2, z_3\}$. Dieser Menge komme als einziges Strukturelement die Kardinalzahl 3 zu (insbesondere soll also die Indizierung der Klassen keine Anordnung der Klassen bedeuten). Die zweistelligen Relationen in dieser Menge sind charakterisiert durch die geordneten Klassenpaare (z_i, z_k), d. h. durch die Elemente der Menge $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z}$. Die Menge aller möglichen zweistelligen Relationen in $\mathfrak{Z}$ ist gegeben durch die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z})$ von $\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z}$. $\mathfrak{P}(\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z})$ bildet einen Verband mit dem mengentheoretischen Durchschnitt $\underset{\mathfrak{M}}{\cap}$ und der mengentheoretischen Vereinigung $\underset{\mathfrak{M}}{\cup}$ als Operationen [3]. Diejenigen Elemente von $\mathfrak{P}(\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z})$, die alle Klassenpaare (z_i, z_i) $(i=1, 2, 3)$ und mit (z_i, z_k) und (z_k, z_l) auch (z_i, z_l) enthalten, sind den in $\mathfrak{Z}$ möglichen Übergangsrelationen äquivalent. Ihre Matrices

$$R_{ik}=\begin{cases} 1, & \text{falls } R\,z_i\,z_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und die im folgenden verwendeten Bezeichnungen sind in Tab. 1 zusammengestellt. Ordnet man die Übergangsrelationen mit Hilfe der in $\mathfrak{P}(\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z})$ definierten mengentheoretischen Inklusion an, so erkennt man, daß sie einen Verband $\mathfrak{V}$ bilden mit der Identität I als Null- und der Allrelation $A \triangleq \mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z}$ als Einselement. $\mathfrak{V}$ ist kein Teilverband von $\mathfrak{P}(\mathfrak{Z}\times\mathfrak{Z})$, so daß die in $\mathfrak{V}$ gegebenen Verbandsoperationen $\underset{\mathfrak{V}}{\cap}$ und $\underset{\mathfrak{V}}{\cup}$ von $\underset{\mathfrak{M}}{\cap}$ und $\underset{\mathfrak{M}}{\cup}$ verschieden sind.

Das Verbandsdiagramm von $\mathfrak{V}$ ist in Teilen in Abb. 1 und 2 dargestellt. Eine der vollen Symmetrie von $\mathfrak{V}$ gerecht werdende, vollständige graphische Darstellung ist jedoch nur im Raume möglich. Hierzu „wickele“ man das in Abb. 1 wiedergegebene Gitter zu dem in Abb. 3 dargestellten zylinderförmigen Gebilde auf und setze die durch Abb. 2 gegebenen Teilstrukturen in den Zylinder an den entsprechenden Stellen ein. Die Elemente von $\mathfrak{V}$ bilden so einen hexagonalen Zylinder mit sieben in verschiedenen Ebenen liegenden „Gruppen“ untereinander nicht vergleichbarer Elemente, den vier Sechsergruppen $(\alpha_i \ldots . \zeta_i)$ $(i=1, \ldots, 4)$, die auf der Hülle des Zylinders liegen, einer Dreiergruppe $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, die symmetrisch um den Schwerpunkt des Zylinders angeordnet werden kann, und zwei Einzelelementen I und A, die auf der Zylinderachse liegen.

$$I \equiv \begin{pmatrix}100\\010\\001\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \equiv \begin{pmatrix}100\\011\\001\end{pmatrix} \quad \beta_1 \equiv \begin{pmatrix}101\\010\\001\end{pmatrix} \quad \gamma_1 \equiv \begin{pmatrix}110\\010\\001\end{pmatrix} \quad \delta_1 \equiv \begin{pmatrix}100\\010\\011\end{pmatrix} \quad \varepsilon_1 \equiv \begin{pmatrix}100\\010\\101\end{pmatrix} \quad \zeta_1 \equiv \begin{pmatrix}100\\110\\001\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \equiv \begin{pmatrix}100\\011\\011\end{pmatrix} \quad \mu_2 \equiv \begin{pmatrix}101\\010\\101\end{pmatrix} \quad \nu_2 \equiv \begin{pmatrix}110\\110\\001\end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 \equiv \begin{pmatrix}100\\111\\001\end{pmatrix} \quad \beta_2 \equiv \begin{pmatrix}101\\011\\001\end{pmatrix} \quad \gamma_2 \equiv \begin{pmatrix}111\\010\\001\end{pmatrix} \quad \delta_2 \equiv \begin{pmatrix}110\\010\\011\end{pmatrix} \quad \varepsilon_2 \equiv \begin{pmatrix}100\\010\\111\end{pmatrix} \quad \zeta_2 \equiv \begin{pmatrix}100\\110\\101\end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 \equiv \begin{pmatrix}100\\111\\101\end{pmatrix} \quad \beta_3 \equiv \begin{pmatrix}101\\111\\001\end{pmatrix} \quad \gamma_3 \equiv \begin{pmatrix}111\\011\\001\end{pmatrix} \quad \delta_3 \equiv \begin{pmatrix}111\\010\\011\end{pmatrix} \quad \varepsilon_3 \equiv \begin{pmatrix}110\\010\\111\end{pmatrix} \quad \zeta_3 \equiv \begin{pmatrix}100\\110\\111\end{pmatrix}$$

$$\alpha_4 \equiv \begin{pmatrix}100\\111\\111\end{pmatrix} \quad \beta_4 \equiv \begin{pmatrix}101\\111\\101\end{pmatrix} \quad \gamma_4 \equiv \begin{pmatrix}111\\111\\001\end{pmatrix} \quad \delta_4 \equiv \begin{pmatrix}111\\011\\011\end{pmatrix} \quad \varepsilon_4 \equiv \begin{pmatrix}111\\010\\111\end{pmatrix} \quad \zeta_4 \equiv \begin{pmatrix}110\\110\\111\end{pmatrix}$$

$$A \equiv \begin{pmatrix}111\\111\\111\end{pmatrix}$$

Tab. 1. Matrices der Übergangsrelationen in $\mathfrak{Z}=\{z_1, z_2, z_3\}$.

[3] Die allgemeinen Eigenschaften dieses Verbandes werden z. B. in G. Birkhoff, Lattice Theory, American Mathematical Society, Providence (R. I.), 1961 beschrieben. In diesem Buch findet man auch die im folgenden verwendeten verbandstheoretischen Begriffsbildungen.

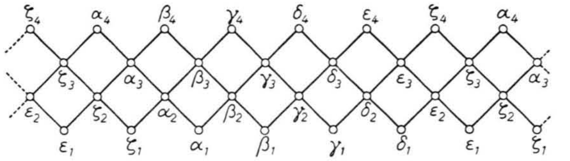

Abb. 1. Teildiagramm des Verbandes der Übergangsrelationen in $\mathfrak{Z}=\{z_1, z_2, z_3\}$.

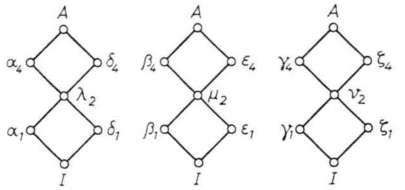

Abb. 2. Teildiagramme des Verbandes der Übergangsrelationen in $\mathfrak{Z}=\{z_1, z_2, z_3\}$.

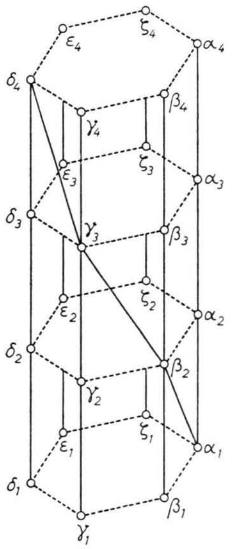

Abb. 3. Räumliche Darstellung des Teildiagrammes Abb. 1 (zur besseren Übersicht wurden die Verbindungslinien zwischen den Verbandselementen teilweise nicht eingezeichnet).

$\mathfrak{V}$ ist ein komplementärer Verband; die Komplemente (im folgenden als $\mathfrak{V}$-Komplemente bezeichnet) sind aber im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Daraus folgt, daß $\mathfrak{V}$ nicht distributiv sein kann. Eine Sonderstellung nehmen die Elemente I $(\alpha_i \ldots . \zeta_i)$ $(i=2, 3, 4)$ und A ein. Sie bilden einen $\underset{\mathfrak{V}}{\cup}$-Teilbund $\mathfrak{V}'$ von $\mathfrak{V}$, in dem jedes Element ein eindeutig bestimmtes, absolutes Komplement in bezug auf die mengentheoretischen Operationen $\underset{\mathfrak{M}}{\cap}$ und $\underset{\mathfrak{M}}{\cup}$ ($\mathfrak{M}$-Komplemente) besitzt. Für die übrigen Elemente von $\mathfrak{V}$ gilt dagegen nur:

$$\begin{cases} \lambda_2 \underset{\mathfrak{M}}{\cup} \mu_2 \underset{\mathfrak{M}}{\cup} \nu_2 = A, \\ \lambda_2 \underset{\mathfrak{M}}{\cap} \mu_2 \underset{\mathfrak{M}}{\cap} \nu_2 = I, \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} \underset{\mathfrak{M}}{\cup} (\alpha_1 \ldots . \zeta_1) = A, \\ \underset{\mathfrak{M}}{\cap} (\alpha_1 \ldots . \zeta_1) = I. \end{cases}$$

$\mathfrak{V}$-Komplemente, $\mathfrak{M}$-Komplemente $\bar{R}$, sowie die inversen Relationen (Konversen) R^{-1} sind in Tab. 2 aufgezählt. In bezug auf die $\mathfrak{M}$-Komplementbildung bilden danach die Sextetts $(\alpha_2 \ldots . \zeta_2)$, $(\alpha_4 \ldots . \zeta_4)$ eine zusammengehörige Gruppe, während das Sextett $(\alpha_3 \ldots . \zeta_3)$ in sich abgeschlossen ist. In bezug auf die Inversenbildung ist jedes Sextett $(\alpha_i \ldots . \zeta_i)$ in sich abgeschlossen. Für $R=I$, λ_2, μ_2, ν_2, A gilt $R=R^{-1}$, d. h. R ist symmetrisch.

Jede Einwirkung auf ein System ruft eine bestimmte Struktur der Zustandsmenge $\mathfrak{Z}$ des Systems hervor: die Einteilung der Zustandsklassen z_k in maximale reversible Zustandsklassen $z_k^{(\text{rev})}$ und eine Anordnung dieser Klassen (Erzeugung einer Zustandsfunktion) [1]. Total-reflexive, transitive Einwirkungen erzeugen stets eine Halbordnung der Klassen $z_k^{(\text{rev})}$. Diese Klasseneinteilungen von $\mathfrak{Z}$ und deren Halbordnungstypen sind in Tab. 2, Spalte 5 und 6, angegeben. A bewirkt (als Allrelation) [4] die Zusammenfassung aller Zustandsklassen zu einer maximalen reversiblen Klasse $[z_1, z_2, z_3]$, $(\alpha_4 \ldots . \zeta_4)$ und $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ bewirken eine Einteilung der Zustandsklassen in zwei Klassen, die übrigen Einwirkungen ändern an der bereits vorgegebenen Klasseneinteilung von $\mathfrak{Z}$ nichts. Im System werden also durch A eine einwertige, durch $(\alpha_4 \ldots . \zeta_4)$ und $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ zweiwertige und durch die übrigen Einwirkungen dreiwertige Zustandsfunktionen definiert. Die durch A, $(\alpha_4 \ldots . \zeta_4)$ und $(\alpha_3 \ldots . \zeta_3)$ bewirkten Halbordnungen der $z_k^{(\text{rev})}$ sind sogar Ordnungen, d. h. die erzeugten Zustandsfunktionen sind Variable. Charakterisiert man die Einwirkungen R durch die Halbordnungstypen, so spaltet das Sextett $(\alpha_4 \ldots . \zeta_4)$ in zwei Tripletts $(\alpha_4, \gamma_4, \varepsilon_4)$, $(\beta_4, \delta_4, \zeta_4)$ und das Sextett $(\alpha_2 \ldots . \zeta_2)$ in $(\alpha_2, \gamma_2, \varepsilon_2)$, $(\beta_2, \delta_2, \zeta_2)$ auf. Die anderen Gruppen bleiben, solange man in $\mathfrak{Z}$ keine weiteren Strukturelemente einführt, unverändert.

II. Die „Erscheinungsformen" des Systems $\mathfrak{Z}=\{z_1, z_2, z_3\}$

Jede Relation $R \in \mathfrak{V}$ ist aus mehreren Relationen zusammengesetzt [5], die sich selbst nicht mehr zerlegen lassen. Diese nicht verfeinerbaren Relationen sind die Atome des Verbandes $\mathfrak{P}(\mathfrak{Z} \times \mathfrak{Z})$ bzw. die

[4] Jeder Einwirkung ist eineindeutig eine Relation R zugeordnet; damit können auch die Einwirkungstypen mit den Symbolen der entsprechenden Relationen bezeichnet werden.

atomaren zweistelligen Prädikate in $\mathfrak{Z}$:

$$\omega_1 \equiv \begin{pmatrix} 000 \\ 001 \\ 000 \end{pmatrix}; \quad \omega_1^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 010 \end{pmatrix}; \quad \varrho_1 = \varrho_1^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 100 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix};$$

$$\omega_2 \equiv \begin{pmatrix} 001 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}; \quad \omega_2^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 100 \end{pmatrix}; \quad \varrho_2 = \varrho_2^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 000 \\ 010 \\ 000 \end{pmatrix};$$

$$\omega_3 \equiv \begin{pmatrix} 010 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}; \quad \omega_3^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 000 \\ 100 \\ 000 \end{pmatrix}; \quad \varrho_3 = \varrho_3^{-1} \equiv \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 001 \end{pmatrix}.$$

Zahl und Art der atomaren Prädikate sind nun durch die Kardinalzahl von $\mathfrak{Z}$, also durch eine Struktureigenschaft der Zustandsmenge des Systems bereits völlig vorbestimmt. Somit können die Atome auch als potentielle Eigenschaften des Systems angesprochen werden [6]. Je nach Art der Einwirkung auf das System von „außen" werden diese potentiellen Eigenschaften aktuell. Da jedes Atom in bezug auf einen Einwirkungstyp einen möglichen oder nicht möglichen Zustandsübergang repräsentiert, bedeutet die Aktualisierung der Atome eine einseitige oder gerichtete Kopplung der Zustandsklassen. Ist aber ein System durch eine Anzahl potentieller Eigenschaften gekennzeichnet, die in verschiedener Zahl aktuell werden können, so kann man auch von verschiedenen „Erscheinungsformen" des Systems sprechen [7]. Erscheinungsformen, Einwirkungstypen (Wechselwirkungen mit der Umgebung) und Relationen über der Zustandsmenge eines Systems bilden somit isomorphe Mengen, deren einander zugeordnete Elemente mit den gleichen Symbolen bezeichnet werden können. In diesem Sinne stellen also unsere Relationen $R \in \mathfrak{V}$ auch verschiedene Erscheinungsformen des Systems $\{z_1, z_2, z_3\}$ dar. Charakteristisch für die Erscheinungsformen sind die durch die Einwirkungen hervorgebrachten Strukturen der Zustandsmenge (also die Halbordnungen Tab. 2, Spalte 6).

Will man die ursprünglichen Unterscheidungsmerkmale, d. h. die Aktualität der atomaren Prädikate zur Kennzeichnung der Erscheinungsformen heranziehen, so kann man wie folgt vorgehen: Wir definieren eine Größe Q_i, die den Wert $+1$ hat, falls ω_i, aber nicht die Inverse ω_i^{-1} aktuell ist und die den Wert -1 hat, falls ω_i^{-1}, aber nicht ω_i aktuell ist. Sind ω_i und ω_i^{-1} beide aktuell, so komme Q_i der Wert Null zu, ebenso, falls weder ω_i noch ω_i^{-1} aktuell sind. Setzen wir für die Aktualität von ω_i das Symbol ω_i und für die Negation der Aktualität das Symbol $\sim\omega_i$, so ist also:

$$Q_i = \begin{cases} +1 \longleftrightarrow \omega_i \wedge \sim\omega_i^{-1}, \\ 0 \longleftrightarrow (\omega_i \wedge \omega_i^{-1}) \vee (\sim\omega_i \wedge \sim\omega_i^{-1}), \\ -1 \longleftrightarrow \omega_i^{-1} \wedge \sim\omega_i. \end{cases}$$

Diese Merkmale der Erscheinungsformen haben formal den Charakter einer Ladung insofern, als jede ladungsartige Eigenschaft gewöhnlich in der gleichen Weise beschrieben wird: Jede ladungsartige Eigenschaft erzeugt eine Zerlegung in drei Klassen, wobei sich eine Klasse zu einer zweiten „polar" verhält, während die dritte Klasse zu jeder dieser beiden Klassen in der Beziehung „neutral" steht. Die durch diese Klasseneinteilung gegebene Zustandsfunktion Q belegt man mit den Zahlen $+1$, 0, -1 und setzt fest:

$$Q = \begin{cases} +1 \longleftrightarrow Q^+ \wedge \sim Q^-, \\ 0 \longleftrightarrow (Q^+ \wedge Q^-) \vee (\sim Q^+ \wedge \sim Q^-), \\ -1 \longleftrightarrow Q^- \wedge \sim Q^+, \end{cases}$$

wobei Q^+ die Aktualität des positiven und Q^- die Aktualität des negativen Ladungszustandes bedeuten. Die „Ladungsgrößen" Q_i unterscheiden sich aber wesentlich von einer gewöhnlichen Ladung dadurch, daß sie sich jeweils auf Paare von Zustandsklassen beziehen, während die Werte Q einer „echten" Ladung den einzelnen Klassen beigegeben werden. Die Werte der Q_i $(i = 1, 2, 3)$ sind in den letzten Spalten der Tab. 2 angegeben. Gegenüber R sind das $\mathfrak{M}$-Komplement R und die Inverse R^{-1} durch Ladungszahlen mit entgegengesetztem Vorzeichen gekennzeichnet. Für I, λ_2, μ_2, ν_2, A sind wegen der

[5] Verknüpfungsoperation ist die logische Konjunktion.

[6] Diese Verfahrensweise scheint übrigens ganz allgemein die einzig mögliche zu sein, eine explizite Beschreibung potentieller Eigenschaften irgendeines Gegenstandes der Anschauung oder des Denkens zu geben: Durch Aufzählen der Identitäten begrifflich isolierter Teile (das sind die ϱ_i) und der möglichen Beziehungen dieser Teile untereinander (das sind u. a. die ω_i), wobei Beziehungen und Teile sich schon von vornherein in gewisser Weise bedingen.

[7] Was hier unter den Erscheinungsformen eines Systems verstanden werden soll, wird klar, wenn man z. B. die bekannten Einwirkungen „energetischer Abschluß" und „adiabatischer Abschluß" betrachtet. Unter adiabatischem Abschluß sind gewisse Zustandsübergänge erlaubt, die unter energetischem Abschluß verboten sind. Der energetische Abschluß erzeugt also eine andere aktuelle Struktur der Zustandsmenge eines Systems als der adiabatische Abschluß. Diese verschiedenen Strukturen der Zustandsmenge sind aber gerade charakteristisch dafür, wie das System mit anderen Systemen in Wechselwirkung treten kann, wie es sich physikalisch äußert, d. h. in welcher Form es in Erscheinung tritt. Dabei wird vorausgesetzt, daß die „Einwirkungen von außen" stets eine stärkere Wechselwirkung darstellen als die Wechselwirkungen der Systeme untereinander. Betrachtet man die Einwirkungstypen als Äquivalente für den Akt der Isolation des Systems aus dem Gesamtsystem „Welt", so ist diese Voraussetzung a priori erfüllt.

R	$\mathfrak{V}$-Komplemente	R	R^{-1}	Klassen $z_k^{(\mathrm{rev})}$	Halbordnung der Klassen $z_k^{(\mathrm{rev})}$	Q_1	Q_2	Q_3
A	I	I	A	$[z_1\ z_2\ z_3]$	●	0	0	0
α_4	$\gamma_2\ \gamma_1\ \beta_1$	γ_2	δ_4	$[z_1]\ [z_2\ z_3]$	○	0	-1	-1
γ_4	$\varepsilon_2\ \varepsilon_1\ \delta_1$	ε_2	ζ_4	$[z_3]\ [z_1\ z_2]$		$+1$	$+1$	0
ε_4	$\alpha_2\ \alpha_1\ \zeta_1$	α_2	β_4	$[z_2]\ [z_1\ z_3]$	●	-1	0	$+1$
β_4	$\delta_2\ \delta_1\ \gamma_1$	δ_2	ε_4	$[z_2]\ [z_1\ z_3]$	●	$+1$	0	-1
δ_4	$\zeta_2\ \zeta_1\ \varepsilon_1$	ζ_2	α_4	$[z_1]\ [z_2\ z_3]$		0	$+1$	$+1$
ζ_4	$\beta_2\ \beta_1\ \alpha_1$	β_2	γ_4	$[z_3]\ [z_1\ z_2]$	○	-1	-1	0
α_3	$\delta_3\ \delta_2\ \gamma_2\ \gamma_1$	δ_3	δ_3		○	$+1$	-1	-1
β_3	$\varepsilon_3\ \varepsilon_2\ \delta_2\ \delta_1$	ε_3	ε_3			$+1$	$+1$	-1
γ_3	$\zeta_3\ \zeta_2\ \varepsilon_2\ \varepsilon_1$	ζ_3	ζ_3		○	$+1$	$+1$	$+1$
δ_3	$\alpha_3\ \alpha_2\ \zeta_2\ \zeta_1$	α_3	α_3			-1	$+1$	$+1$
ε_3	$\beta_3\ \beta_2\ \alpha_2\ \alpha_1$	β_3	β_3			-1	-1	$+1$
ζ_3	$\gamma_3\ \gamma_2\ \beta_2\ \beta_1$	γ_3	γ_3		○	-1	-1	-1
α_2	$\varepsilon_4\ \varepsilon_3\ \delta_3\ \delta_2$	ε_4	δ_2	$[z_1]\ [z_2]\ [z_3]$	○ ○	$+1$	0	-1
γ_2	$\alpha_4\ \alpha_3\ \zeta_3\ \zeta_2$	α_4	ζ_2			0	$+1$	$+1$
ε_2	$\gamma_4\ \gamma_3\ \beta_3\ \beta_2$	γ_4	β_2		○	-1	-1	0
β_2	$\zeta_4\ \zeta_3\ \varepsilon_3\ \varepsilon_2$	ζ_4	ε_2		○	$+1$	$+1$	0
δ_2	$\beta_4\ \beta_3\ \alpha_3\ \alpha_2$	β_4	α_2			-1	0	$+1$
ζ_2	$\delta_4\ \delta_3\ \gamma_3\ \gamma_2$	δ_4	γ_2		○ ○	0	-1	-1
λ_2	$\mu_2\ \nu_2$	—	λ_2	$[z_1]\ [z_2\ z_3]$		0	0	0
μ_2	$\nu_2\ \lambda_2$	—	μ_2	$[z_2]\ [z_1\ z_3]$	○ ●	0	0	0
ν_2	$\lambda_2\ \mu_2$	—	ν_2	$[z_3]\ [z_1\ z_2]$		0	0	0
α_1	$\zeta_4\ \varepsilon_4\ \varepsilon_3$	—	δ_1			$+1$	0	0
β_1	$\alpha_4\ \zeta_4\ \zeta_3$	—	ε_1		○	0	$+1$	0
γ_1	$\beta_4\ \alpha_4\ \alpha_3$	—	ζ_1		○	0	0	$+1$
δ_1	$\gamma_4\ \beta_4\ \beta_3$	—	α_1			-1	0	0
ε_1	$\delta_4\ \gamma_4\ \gamma_3$	—	β_1	$[z_1]\ [z_2]\ [z_3]$	○	0	-1	0
ζ_1	$\varepsilon_4\ \delta_4\ \delta_3$	—	γ_1			0	0	-1
I	A	A	I		○ ○ ○	0	0	0

Tab. 2. Eigenschaften der Übergangsrelationen in $\mathfrak{Z}=\{z_1, z_2, z_3\}$. (In Spalte 6 steht ein Kreis für jede Klasse $z_k^{(\mathrm{rev})}$; ein ausgefüllter Kreis bedeutet, daß $z_k^{(\mathrm{rev})}$ mehrere Zustandsklassen z_i umfaßt.)

Symmetrie alle Q_i gleich Null. Die Atome ϱ_i scheiden als Unterscheidungsmerkmale aus, da sie mit $I \subset R$ in allen $R \in \mathfrak{V}$ enthalten sind.

Ist bereits die Eigenschaft E, die die Dreiteilung der Zustandsmenge des Systems definiert, ladungsartig (oder ist aus irgendeinem anderen Grund die Struktur der Zustandsmenge $\mathfrak{Z}$ derart beschaffen, daß zwei Klassen vor einer dritten ausgezeichnet sind), so wird eine der sonst gleichberechtigten Ladungsgrößen Q_i singulär, nämlich diejenige, die die Kopplung der zueinander polaren Klassen beschreibt. In diesem Falle ist es erlaubt, die möglichen Erscheinungsformen nach den Werten dieser hervorgehobenen Ladungszahl zu klassifizieren. Ist z. B. z_2 die Klasse der negativen und z_3 die Klasse der positiven Zustände, so erhält man eine Klassifizierung nach Q_1, wie sie in Tab. 3 dargestellt ist. Danach ist in der Menge der Erscheinungsformen eines Systems $\{z_1^{(0)}, z_2^{(-)}, z_3^{(+)}\}$ folgender Zusammenhang gegeben:

1. Das Sextett der untereinander nicht vergleichbaren Erscheinungsformen $(\alpha_4 \ldots . \zeta_4)$ spaltet in bezug auf die Werte von Q_1 auf in drei Dubletts (γ_4, β_4), (α_4, δ_4), (ε_4, ζ_4), in denen die Vorderglieder γ_4, α_4, ε_4 bzw. die Hinterglieder β_4, δ_4, ζ_4 jeweils von gleichem Halbordnungstyp sind. In bezug auf die Inversenbildung ist das Dublett (α_4, δ_4) abgeschlossen, während (γ_4, β_4), (ε_4, ζ_4) ein abgeschlossenes Quartett bilden. Ein ganz entsprechender Zusammenhang ist im Sextett $(\alpha_2 \ldots . \zeta_2)$ gegeben. Dabei sind $(\alpha_4 \ldots . \zeta_4)$ und $(\alpha_2 \ldots . \zeta_2)$ über die $\mathfrak{M}$-Komplementbildung verbunden derart, daß die zu $Q_1 = 0$ gehörenden Dubletts (α_4, δ_4), (γ_2, ζ_2) als abgeschlossenes Quartett erscheinen, während die zu $Q_1 = \pm 1$ gehörenden Quartetts durch die $\mathfrak{M}$-Komplementbildung zu einem Oktett $(\gamma_4, \beta_4, \varepsilon_4, \zeta_4,$

Q_1	R	
0	I	$\mathfrak{B}'$
+1	$\gamma_4 \quad \beta_4$	
0	$\alpha_4 \quad \alpha_4^{-1}$	
−1	$\beta_4^{-1} \gamma_4^{-1}$	
+1	$\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$	
−1	$\bar{\alpha}_3 \bar{\beta}_3 \bar{\gamma}_3$	
+1	$\overline{\beta_4^{-1}} \quad \overline{\gamma_4^{-1}}$	
0	$\bar{\alpha}_4 \quad \overline{\alpha_4^{-1}}$	
−1	$\bar{\gamma}_4 \quad \bar{\beta}_4$	
0	$\lambda_2 \mu_2 \nu_2$	—
+1	α_1	
0	$(\beta_1 \beta_1^{-1})(\gamma_1 \gamma_1^{-1})$	—
−1	α_1^{-1}	
0	I	$\mathfrak{B}'$

Tab. 3. Klassifizierung der untereinander nicht vergleichbaren Erscheinungsformen R nach der Ladung Q_1.

Isospin-multipletts	l_Q	Y	N	l_N	$2\,I_N$	S
(p n)				+1		0
$(K^+ K^0)$	+1			0		+1
$(\bar{\Xi}^- \bar{\Xi}^0)$				−1		+2
$(\Sigma^+ \Sigma^0 \Sigma^-)$				+1		−1
$(\pi^+ \pi^0 \pi^-)$	0			0		0
$(\bar{\Sigma}^+ \bar{\Sigma}^0 \bar{\Sigma}^-)$				−1		+1
$(\Xi^- \Xi^0)$				+1		−2
$(K^- \bar{K}^0)$	−1			0		−1
$(\bar{p}\ \bar{n})$				−1		0
(μ^+)	+2	+1		+1	−1	+1
$e^+ \quad \bar{\nu}$	+1	0	0	+1	−1	0
$\nu \quad e^-$	−1	0		−1	+1	0
(μ^-)	−2	−1		−1	+1	−1

Tab. 4. Quantenzahlen der Elementarteilchen nach [8, 9]. (Die Isospinsinguletts Λ^0, $\bar{\Lambda}^0$ fallen im Schema von BARUT mit den Σ^0-Teilchen zusammen.)

α_2, β_2, ε_2, δ_2) zusammengefaßt werden;

2. Das Sextett $(\alpha_3 \ldots . \zeta_3)$ spaltet in zwei Tripletts mit $Q_1 = +1$ bzw. $Q_1 = -1$ auf, die sich $\mathfrak{M}$-komplementär und invers zueinander verhalten;

3. Das Triplett der weder untereinander noch mit $(\alpha_3 \ldots . \zeta_3)$ und $(\alpha_2 \ldots . \zeta_2)$ vergleichbaren Erscheinungsformen $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ bleibt mit $Q_1 = 0$ als Triplett erhalten;

4. Das Sextett $(\alpha_1 \ldots . \zeta_1)$ wird durch Q_1 in zwei Singuletts und ein Quartett zerlegt. Die Singuletts sind invers zueinander, das Quartett zerfällt in bezug auf die Inversenbildung in zwei abgeschlossene Dubletts.

Bemerkenswert ist, daß diese Ordnung unter den Erscheinungsformen des Systems $\{z_1^{(0)}, z_2^{(-)}, z_3^{(+)}\}$ (im mathematischen Sinne ist es eine Halbordnung) formal eine ganz ähnliche Struktur aufweist, wie die Ordnung der Elementarteilchen nach dem Schema von GELL–MANN und NISHIJIMA. BARUT [8] hat gezeigt, daß das GELL-MANN-NISHIJIMA-Schema geometrisch veranschaulicht werden kann durch Anordnung der Mesonen und Baryonen auf einem unserem Teilbund $\mathfrak{B}'$ ähnlichen hexagonalen Zylinder und durch Anordnung der Leptonen auf einem von diesem Zylinder separierten Sechseck. Die tabellarisch einfachste Darstellung der Struktur des BARUTschen Zylinders erhält man, wenn dieser so gedreht wird, daß die Ebenen mit gleichem Isoparitätsindex (hypercharge Y) übereinander liegen. Diese Darstellung ist in Tab. 4 wiedergegeben. Ein Vergleich mit Tab. 3 zeigt, daß in gewisser Hinsicht dem Quartett $(\alpha_4 \ldots .)$ die K-Mesonen, dem Oktett $(\gamma_4, \beta_4 \ldots .)$ die Nukleonen und Ξ-Teilchen, dem Sextett $(\alpha_3 \ldots . \zeta_3)$ die Σ-Teilchen, dem Triplett $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ die π-Mesonen und dem Sextett $(\alpha_1 \ldots . \zeta_1)$ die Leptonen entsprechen. Durch geeignete Kombination der Ladungszahlen Q_2, Q_3 und Berücksichtigung der in $\mathfrak{Z}$ definierten Zustandsfunktionen kann man diese formale Analogie sogar noch etwas deutlicher machen. Eine eindeutige Zuordnung der Erscheinungsformen zu den Elementarteilchen scheint jedoch sinnlos, solange nicht auch ein physikalischer Zusammenhang der verschiedenen Ordnungsattribute aufgezeigt wird. Sollte die Analogie mehr als zufällig sein, so könnte für die Elementarteilchen ein bestechend einfaches Modell entworfen werden, in dem das System $\{z_1^{(0)}, z_2^{(-)}, z_3^{(+)}\}$ die Rolle einer Art „materia prima" spielt und die Mannigfaltigkeit der Elementarteilchen als Mannigfaltigkeit der möglichen transitiven Kopplungen zwischen den Zustandsklassen erscheint.

[8] A. O. BARUT, Nuovo Cim. **10**, 1146 [1958].

[9] H.-P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI, Z. Naturforschg. **14 a**, 441 [1959].